SOLUTIONS

Solution 1 :

1°/ f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$;

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^{2x}) - 2e^{2x}(1+e^x)}{(1+e^{2x})^2} = \frac{e^x(-e^{2x} - 2e^x + 1)}{(1+e^{2x})^2}$$

le signe de $f'(x)$ est celui de $-e^{2x} - 2e^x + 1$

on a : $-e^{2x} - 2e^x + 1 = -(e^{2x} + 2e^x + 1) + 2 = 2 - (e^x + 1)^2$.

$2 - (e^x + 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq (e^x + 1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2} \geq e^x + 1 \Leftrightarrow e^x \leq \sqrt{2} - 1$

$\Leftrightarrow x \leq Log(\sqrt{2} - 1)$ d'où le tableau des variations de f

x	$-\infty$		$Log(\sqrt{2}-1)$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$	↘	0

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1+e^x}{1+e^{2x}} = 1$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+e^x}{1+e^{2x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x(\frac{1}{e^x}+1)}{e^x(\frac{1}{e^x}+e^x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{e^x}+1}{\frac{1}{e^x}+e^x} = 0$

b) d'après le tableau des variations de f on a :

$$\forall x \in \mathbf{R} ;\ 0 < f(x) \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

2°/ $\forall x \in \mathbf{R}$; $(1+e^{2x})f'(x) + (e^{2x} - 1)f(x)$

$$= \frac{e^x(-e^{2x} - 2e^x + 1)}{1+e^{2x}} + (e^{2x} - 1).\frac{1+e^x}{1+e^{2x}}$$